Wiskunde 4 15-11-'00

Tentamenopgave[1]

I

Beschouw de integraal

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx \tag{1}$$

1. Toon aan dat de volgende reeksontwikkeling geldig is:

$$\frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{x^3 e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \sum_{n=1}^{\infty} x^3 e^{-nx} \qquad x > 0. \tag{2}$$

2. Toon aan dat

$$\int_0^{+\infty} x^3 e^{-nx} dx = \frac{J}{n^4}, \tag{3}$$

waar $J = J(3) = \int_0^{+\infty} y^3 e^{-y} dy$ en bereken $J(k) = \int_0^{+\infty} y^k e^{-y} dy$ voor $k = 0, 1, 2, 3$.
Aanwijzing: maak gebruik van de bekende eigenschappen van de Γ-functie of toon aan, m.b.v een partiële integratie, dat $J(k) = kJ(k-1)$, $k \in \mathbb{N}$.

3. Bereken de integraal I door gebruik te maken van de reeksontwikkeling

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \tag{4}$$

4. Formuleer de stelling die bij 3. de verwisseling van sommatie en integratie rechtvaardigt.

II

1. Geef de formules van Plancherel voor Fouriertransformatie, en de voorwaarden waaronder ze geldig zijn.

2. Verifieer dat

$$i. \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-a|x|} e^{-2\pi i x\xi} dx = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\xi^2}, \ a > 0 \qquad ii. \quad \frac{1}{2b} \int_{-b}^{b} e^{-2\pi i x\xi} dx = \frac{\sin(2\pi b\xi)}{2\pi b\xi} \tag{5}$$

3. Toon aan met behulp hiervan en van een transformatie van de variabele dat

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{a}{a^2 + y^2} \frac{\sin(by)}{y} dy = \frac{\pi}{a}(1 - e^{-ab}) \tag{6}$$

III

1. Beschouw de volgende reeksontwikkeling van een functie f:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \tag{7}$$

waarbij

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| + |b_n| < +\infty \tag{8}$$

Druk a_n, voor $n \geq 0$, en b_n, voor $n \geq 1$, uit in termen van f.

2. Geef de formule van Parseval voor $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ in termen van de coëfficienten a_n en b_n.

3. Beschouw de 2π-periodieke functie f voor $|x| \leq \pi$ gedefinieerd door $f(x) = |x|$. Geef de Fourierreeksontwikkeling voor de functie f, liefst in reële termen (of in complexe termen).

4. Bereken m.b.v. vraag 2. en 3. de sommen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ en $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.

---

[1] De onderdelen I, II en III zijn onafhankelijk